MALI VZORCI

problem ocen iz malih zorcev

rešitev: t-porazdelitev

as. dr. Nino RODE

prof. dr. Blaž MESEC

VELIKI IN MALI VZORCI

- Vzorčne statistike se porazdeljujejo normalno okoli parametra populacije $$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$
-
- Problem: **ne poznamo** standardnega odklona populacije
- Pri malih vzorcih standardni odklon vzorca **NI** dovolj zanesljiva ocena standardnega odklona populacije $$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \neq \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

MALI VZORCI t-porazdelitev

- Pri malih vzorcih je porazdelitev statistike

$$t_n = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

drugačna: odvisna je samo od velikosti vzorca, natančneje od stopinj prostosti

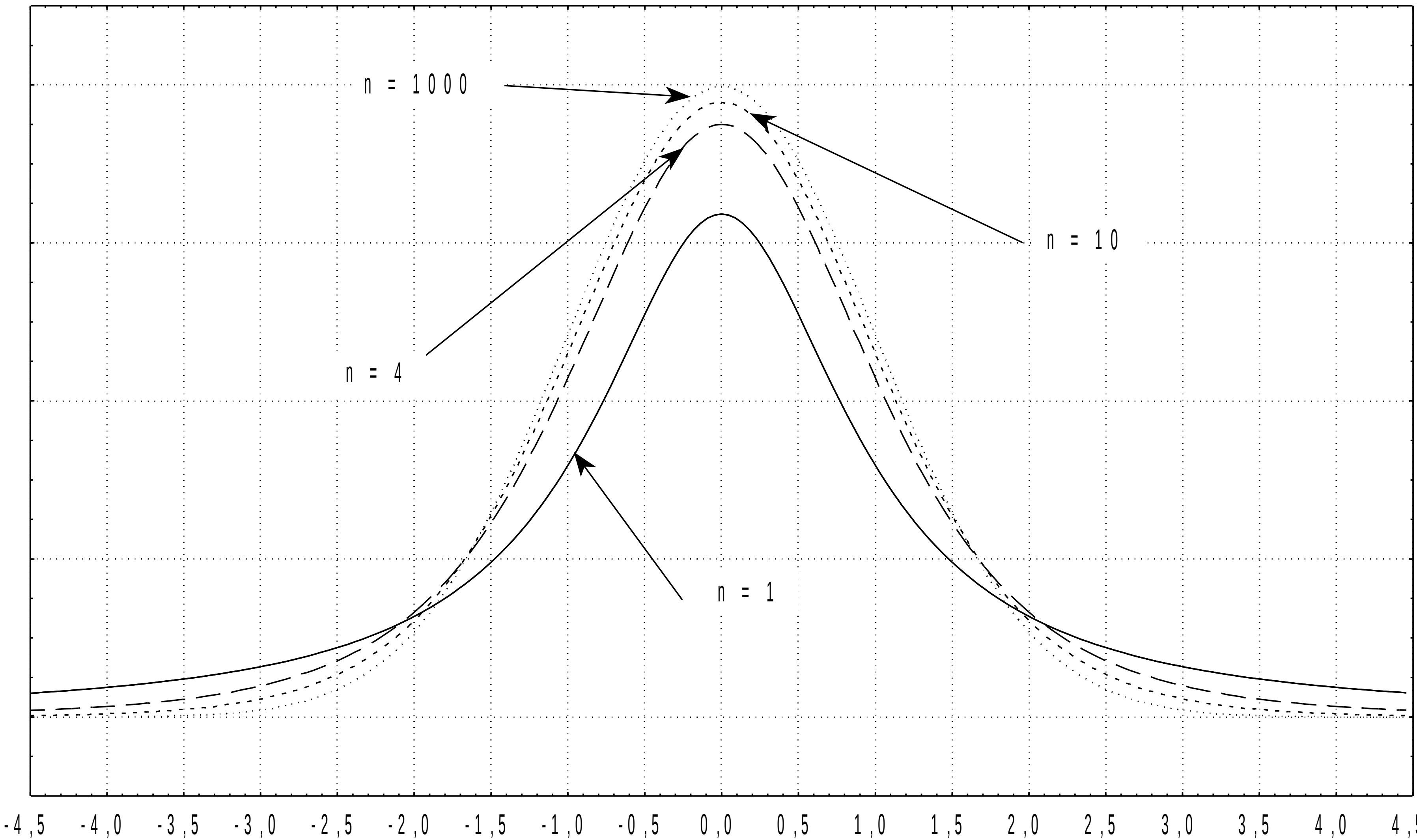
MALI VZORCI stopinje prostosti

- Vsako določeno vrednost statistike lahko dobimo iz različnih vzorcev

$$\bar{x}[1;2;3;4;5]=\bar{x}[3;2;3;2;5]=\bar{x}[100;25;10;15;-135]=3$$

- Ti vzorci imajo skupno lastnost: enako statistiko
- Možnost izbire v teh vzorcih je zato manjša, kot če ne bi imeli skupne vrednosti statistike, to pa veča napako vzorčenja

MALI VZORCI t - porazdelitev



MALI VZORCI standardne napake različnih statistik

- Aritmetična sredina

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

- Mediana

$$s_{Me} = \frac{1{,}2535 \cdot s}{\sqrt{n-1}}$$

- Odstotek

$$s_P = \sqrt{\frac{P \cdot (100 - P)}{n-1}}$$

- Koeficient korelacije

$$s_x = \frac{(1-r)}{\sqrt{n-2}}$$

- Razlika aritmetičnih sredin (neodvisni vzorci)

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2) \cdot ((n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2)}{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}}$$

Ocenjevanje parametrov mali vzorci

- so jih 120 (n) anketirali glede poučenosti o aidsu
- Rezultati:
  - Povprečno število točk na testu = 43 točk
  - s = 5,1 točke
- Določi meje intervala zaupanja v aritmetično sredino pri stopnji tveganja 0,05

Ocenjevanje parametrov

$$s_{x} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{5,1}{\sqrt{119}} = 0,4675$$

$$\bar{x} - t_{0,05\,;\,119} \cdot s_{\bar{x}} = 43 - 1,9801 \cdot 0,4675 = 43 - 0,93 = 42,07$$

$$\bar{x} + t_{0,05\,;\,119} \cdot s_{\bar{x}} = 43 + 1,9801 \cdot 0,4675 = 43 + 0,93 = 43,93$$

S 95% zaupanjem lahko trdimo, da je aritmetična sredina populacije med 42,02 in 43,93

Ocenjevanje parametrov

- Pri istih rezultatih in vzorcu 20 študentk/ov

$$s_{x} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{5{,}1}{\sqrt{19}} = 1{,}1700$$

$$\bar{x} - t_{0{,}05\,;\,19} \cdot s_{\bar{x}} = 43 - 2{,}0930 \cdot 1{,}1700 = 43 - 2{,}449 = 40{,}55$$

$$\bar{x} + t_{0{,}05\,;\,19} \cdot s_{\bar{x}} = 43 + 2{,}0930 \cdot 1{,}1700 = 43 + 2{,}449 = 45{,}45$$

S 95% zaupanjem lahko trdimo, da je aritmetična sredina populacije med 40,55 in 45,45

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:

Primer aritmetičnih sredin

- Otroci, stari 2 do 4 leta
- 9 deklic in 6 dečkov
- Pri dečkih so opazili povprečno 6 agresivnih dejanj (varianca 4), pri deklicah pa 1,9 (varianca 5,4)
- Pri stopnji tveganja 0,05 preizkusimo hipotezo, da med dečki in deklicami ni razlik v povprečnem številu agresivnih dejanj

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:

Primer aritmetičnih sredin

- Poglejmo izračune:
- Razlika med povprečnima ocenama je:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 6 - 1{,}9 = 4{,}1$$

- Standardna napaka za razliko med aritmetičnimi sredinami je:

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2) \cdot ((n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2)}{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}}$$

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:
Primer aritmetičnih sredin

- Izračun Standardne napake:

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{(n_1+n_2)\cdot((n_1-1)\cdot s_1^2+(n_2-1)\cdot s_2^2)}{n_1\cdot n_2\cdot(n_1+n_2-2)}}$$

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{(6+9)\cdot((6-1)\cdot s_1^2+(9-1)\cdot s_2^2)}{6\cdot 9\cdot(6+9-2)}}=\sqrt{\frac{15\cdot(5\cdot 4+8\cdot 5{,}4)}{6\cdot 9\cdot 13}}$$

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{(15)\cdot(20+43{,}2)}{702}}=\sqrt{\frac{(15)\cdot(63{,}2)}{702}}=\sqrt{\frac{948}{702}}=\sqrt{1{,}35}=1{,}16$$

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:

Primer aritmetičnih sredin

- Izračun t-vrednosti za razliko:

$$t_{sp\,;\,\alpha} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{6 - 1{,}9}{1{,}16} = \frac{4{,}1}{1{,}16} = 3{,}53$$

- Primerjava izračuna s tabelirano vrednostjo:

$$t_{iz\ podatkov} = 3{,}53 > 2{,}093 = t_{19;\,0{,}05}$$

- Odgovor: **z manj kot 5%** (tudi manj kot 1%) tveganjem **lahko zavrnemo** ničelno hipotezo, da med dečki in deklicami ni razlik v povprečnem številu agresivnih dejanj

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:
Primer odstotkov

- Redni študentje (n = 131) in specializanti (n = 34) socialnega dela
- Med rednimi jih je 14,5 odstotka izjavilo, da so dobro poučeni o AIDS-u, med specializanti pa 20,6
- Preizkusi hipotezo, da med rednimi študenti in specializanti ni razlik v odstotku tistih, ki menijo, da so dobro poučeni o aidsu

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:

Primer odstotkov

- Razlika med odstotkoma je:

$$P_1 - P_2 = 20,6 - 14,5 = 6,1$$

- Odstotki se v vzorcih **NE porazdeljujejo po normalni porazdelitvi**, zato pri majhnih vzorcih ne moremo preprosto uporabiti enake logike za izračun standardne napake za razliko, kot pri aritmetičnih sredinah

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:
Primer odstotkov

- Uporabimo metodo skupnega odstotka
  - Če v populaciji med odstotkoma ni razlik (H_0), sta oba odstotka iz vzorca oceni istega odstotka
  - Skupni odstotek dobimo po formuli:

$$P_s = \frac{P_1 \cdot n_1 + P_2 \cdot n_2}{n_1 + n_2} = \frac{20{,}6 \cdot 34 + 14{,}5 \cdot 131}{34 + 131} = \frac{2599{,}9}{165} = 15{,}76$$

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:
Primer odstotkov

- Standardna napaka za razliko med vzorčnima ocenama na podlagi skupnega odstotka je:

$$s_{P_1-P_2} = \sqrt{P_s \cdot (100 - P_s) \cdot (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})} = \sqrt{1327{,}41 \cdot (\frac{1}{34} + \frac{1}{131})}$$

$$s_{P_1-P_2} = \sqrt{1327{,}41 \cdot (0{,}029 + 0{,}008)} = \sqrt{1327{,}41 \cdot 0{,}037} = \sqrt{49{,}17} = 7{,}01$$

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:
Primer odstotkov

- Razliko med odstotkoma v vzorcu primerjamo s to standardno napako te razlike

$$t_{sp;\alpha} = \frac{P_1 - P_2}{s_{P_1 - P_2}} = \frac{6{,}1}{7{,}01} = 0{,}87$$

- Ugotovimo, da je izračunani t **premajhen**, da bi lahko zavrnili ničelno hipotezo

$$t_{iz\ podatkov} = 0{,}87 < 1{,}975 = t_{163;0{,}05}$$

- Odgovor: Na podlagi danih podatkov ne moremo trditi, da je razlika med odstotki statistično značilna na nivoju 0,05 (tudi pri 0,35 ne)

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:

Primer odstotkov

- Izračun Standardne napake:

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{(n_1+n_2)\cdot((n_1-1)\cdot s_1^2+(n_2-1)\cdot s_2^2)}{n_1\cdot n_2\cdot(n_1+n_2-2)}}$$

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{(6+9)\cdot((6-1)\cdot s_1^2+(9-1)\cdot s_2^2)}{6\cdot 9\cdot(6+9-2)}}=\sqrt{\frac{15\cdot(5\cdot 4+8\cdot 5{,}4)}{6\cdot 9\cdot 13}}$$

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\frac{(15)\cdot(20+43{,}2)}{702}}=\sqrt{\frac{(15)\cdot(63{,}2)}{702}}=\sqrt{\frac{948}{702}}=\sqrt{1{,}35}=1{,}16$$

Sklepanje na podlagi malih vzorcev:
Primer odstotkov

- Izračun t-vrednosti za razliko:

$$t_{sp\,;\,\alpha} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{6-1{,}9}{1{,}16} = \frac{4{,}1}{1{,}16} = 3{,}53$$

- Primerjava izračuna s tabelirano vrednostjo:

$$t_{iz\ podatkov} = 3{,}53 > 2{,}160 = t_{13\,;\,0{,}05}$$

Odgovor: **z manj kot 5%** (tudi manj kot 1%) tveganjem **lahko zavrnemo** ničelno hipotezo, da med dečki in deklicami ni razlik v povprečnem številu agresivnih dejanj